Adı Soyadı: **06.11.2023**

Numara:

MAT 211 ANALİZ III DERSİ KISA SINAV SORULARI

1) $\int_{1}^{+\infty} \sin x^2 \, dx$ has olmayan integralinin karakterini belirleyiniz (25 puan).

2) $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ birinci çeşit has olmayan integrali mutlak yakınsak ise yakınsaktır ifadesi doğru ise ispat ediniz, yanlış ise bir ters örnek veriniz (25 puan).

3) $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} \sin x}{\ln(1+x)} \, dx$ has olmayan integralinin karakterini belirleyiniz (20 puan).

4) Aşağıda verilen integrallerin çeşidini (açıklamalar yaparak) belirleyiniz (30 puan).

a) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \, dx$ **b)** $\int_{3}^{+\infty} \frac{x}{(x-2)^2} \, dx$ **c)** $\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2} \, dx$

Not: 4. sorudaki her şık 10 puandır. Süre 60 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

CEVAP ANAHTARI

1) $\int_1^{+\infty} \sin x^2\, dx$ integralinde $\forall x \in [1,+\infty)$ için $g(x) = \sin x^2$

fonksiyonu süreklidir. İntegrasyon aralığı sonsuz olduğundan 1. çeşit has

olmayan integraldir.

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} \cdot 2x \cdot \sin x^2\, dx$$

olur. Burada $\forall x \in [1,+\infty)$ için $\varphi(x) = \frac{1}{2x}$, $f(x) = 2x \cdot \sin x^2\, dx$ olsun.

$x_1 < x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ için $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2x_1} > \frac{1}{2x_2}$

olduğundan φ azalandır. Yine $\forall x \in [1,+\infty)$ için $0 < \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2}$

olup φ sınırlıdır. Ayrıca $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ dır.

Şimdi $\forall b \geq 1$ için

$$\left| \int_1^b f(x)\, dx \right| = \left| \int_1^b 2x \cdot \sin x^2\, dx \right|$$

integralinde $u = x^2 \Leftrightarrow 2x\, dx = du$ değişken değiştirmesi yapalım. Sınırlar da

değişir. Burada $x_1 = 1 \Rightarrow u_1 = 1$, $x_2 = b \Rightarrow u_2 = b^2$ olup

$$\left| \int_1^b f(x)\, dx \right| = \left| \int_1^{b^2} \sin u \right| = \left| -\cos u \Big|_1^{b^2} \right|$$

$$= \left| -\cos b^2 + \cos 1 \right|$$

$$\leq |\cos b^2| + |\cos 1|$$

$$\leq 2$$

olur. Böylece Dirichlet testinden $\int_1^{+\infty} \sin x^2\, dx$ integrali yakınsaktır.

2) Verilen ifade doğrudur. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ has olmayan integrali mutlak yakınsak olsun. O halde $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ yakınsaktır.

Böylece Cauchy kriterinden herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\forall y \geq t \geq M$ için

$$\left| \int_t^y |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon \quad \dots (1)$$

olacak şekilde bir $M \in [a, +\infty)$ sayısı vardır. Burada

$0 \leq |f(x)|$ olup $0 \leq \int_t^y |f(x)|\,dx$ olur. Böylece aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için

$\forall y \geq t \geq M$ iken (1) kullanılarak

$$\left| \int_t^y f(x)\,dx \right| \leq \int_t^y |f(x)|\,dx < \varepsilon$$

yazılır. Bu takdirde $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integrali Cauchy kriterini sağlar. O halde $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ yakınsaktır.

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-x^2} \cdot \sin x}{\ln(1+x)} \longrightarrow \dfrac{0}{0}$ belirsizliği L'Hospital yapılırsa

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-x^2} \cdot \sin x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x \cdot e^{-x^2} \cdot \sin x + \cos x \cdot e^{-x^2}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \to 0^+} (1+x)\left[-2x\, e^{-x^2} \sin x + \cos x \cdot e^{-x^2}\right] = 1$$

olur. Ancak integral sonsuz aralık üzerinde verilmiştir. O halde birinci çeşit has olmayan integraldir.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} \sin x}{\ln(1+x)}\,dx = \int_0^{e} \frac{e^{-x^2} \cdot \sin x}{\ln(1+x)}\,dx + \int_e^{+\infty} \frac{e^{-x^2} \cdot \sin x}{\ln(1+x)}\,dx$$

olup $\int_0^{e} \dfrac{e^{-x^2} \sin x}{\ln(1+x)}\,dx$ has integral olduğundan sonlu değere sahiptir.

$\int_e^{+\infty} \dfrac{e^{-x^2} \cdot \sin x}{\ln(1+x)}\,dx$ integrali için $\forall x \in [e, +\infty)$ iken $\ln(1+x) > \ln e = 1$ olup

$$\left| \frac{e^{-x^2} \cdot \sin x}{\ln(1+x)} \right| = \frac{e^{-x^2} \cdot |\sin x|}{\ln(1+x)} \leq \frac{e^{-x^2}}{\ln(1+x)} < e^{-x^2} \quad \dots (2)$$

3. cevabın devamı)

$\int_{e}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ integralinde $\forall x \in [e,+\infty)$ için $f(x)=e^{-x^2}$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$ alınırsa

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}} \to \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{L'Hospital})$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$$

olur. Burada $p=2>1$ olduğundan $\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ integrali p-testi gereği yakınsak olup limit karşılaştırma testinden $\int_{e}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ yakınsaktır. O halde (2) eşitsizliği ve karşılaştırma testinden $\int_{e}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}\cdot \sin x}{\ln(1+x)}\,dx$ mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır.

4) a) $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$ için $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)} = +\infty$ olup $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ fonksiyonu $x_0=0$ da sınırsızdır. Yine $\forall x \in (0,1]$ olduğundan 2. çeşit has olmayan integraldir.

b) $\int_{3}^{+\infty}\frac{x}{(x-2)^2}\,dx$ integralinde $\forall x \in [3,+\infty)$ için $f(x)=\frac{x}{(x-2)^2}$ sürekli bir fonksiyondur. Ancak integral sonsuz aralık üzerinde verilmiştir. O halde 1. çeşit has olmayan integraldir.

c) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{0}{0}$ belirsizliği (L'Hospital)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ integrali has bir integral olur.